Rank 1のInvertible Algebraについて (可換環論の研究)

数理解析研究所講究録
374巻 1980年 145-156

Rank 1 の invertible algebra について

富山大　教育　浅沼照雄

1　ここでは ring は commutative で 1 をもつと仮定する。R-algebra A が invertible であるとは R-algebra B が存在して $A\otimes_R B \underset{R}{\cong} R^{[n]}$ ($= R[x_1,\dots,x_n]$: n 変数の polynomial ring) なることである。さて $\Omega_R(A)$ で differential A-module を，$R^{(n)}$ で rank n の free R-module を表わすことにする。上の定義より $\Omega_R(A\otimes_R B) \cong \Omega_R(A)\otimes B \oplus A\otimes_R\Omega_R(B) \cong \Omega_R(R^{[n]}) \cong R^{[n](n)} \cong (A\otimes B)^{(n)}$ であるから $\Omega_R(A)\otimes_R B$ は projective $A\otimes B$-module である。そこで $f: R^{[n]}\to R$ なる natural mapping によって $B \xrightarrow{1_A\otimes} A\otimes_R B \cong R^{[n]} \xrightarrow{f} R$ を得るから $g: B\to R$ なる R-algebra homomorphism が存在する。ゆえに A の identity mapping を id とすれば $id\otimes g$: $A\otimes_R B \to A$ であるから $\Omega_R(A)\otimes_R B$ から projective A-module $\Omega_R(A)$ が induce される。ゆえに ${}^\forall\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}\,A$ に対して $\Omega_R(A)_{\mathfrak{p}} \overset{def}{=} \Omega_R(A)\otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ は free $A_{\mathfrak{p}}$-module であ

る。このrankが $\mathfrak{p}$ によらず一定 r であるとき r を A のrankといい $\mathrm{rank}\,A = r$ とかく。明らかに $0 \leq r \leq n$. また $\mathrm{rank}\,A = 0$ ならば $A = R$ となる。任意のinvertible algebra A についてrankが存在するかどうかわからないがとくに R がintegral domainであるときは存在する。この小論ではintegral domain R 上のrank 1なるinvertible algebraについて考える。とくに R がnoetherなるときが本質的である。以下 R をnoetherian domain, A をrank 1のinvertible R-algebraと仮定する。さて $R[X] = R^{[1]}$ は明らかにinvertible R-algebra with rank 1であるがこれをtrivialな例ということにする。まず考えられる問題はnon-trivialな A の例が存在するかどうかということである。これについてたとえば R をDedekind domainで $\mathrm{Pic}(R) \neq \{0\}$ なるものとすれば $\mathrm{Pic}(R) \ni M$ が存在して $M \not\cong R^{(1)}$ となる。さて N を $M \oplus N \cong R^{(n)}$ なる R-projective moduleとすれば $\mathrm{Sym}_R(M \oplus N) \cong \mathrm{Sym}_R(M) \otimes \mathrm{Sym}_R(N) \cong \mathrm{Sym}_R(R^{(n)}) \cong R^{[n]}$ がなりたつ。ここで Sym_R は R 上のsymmetric algebraを表わす。定義より $\mathrm{Sym}_R(M)$ はinvertible また $R_{\mathfrak{p}} \otimes_R \Omega_R(\mathrm{Sym}_R(M)) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}} \otimes \mathrm{Sym}_R(M)) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathrm{Sym}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}} \otimes M)) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathrm{Sym}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}^{(1)})) \cong \Omega_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}^{[1]}) \cong R_{\mathfrak{p}}^{[1](1)}$. このことから $\mathrm{Sym}_R(M)$ のrankが1であることがわかる。また $M \not\cong R^{(1)}$ より $\mathrm{Sym}_R(M) \not\cong R^{[1]}$ ゆえこれは A のnon-trivialな例になっ

ている。この例においては $\mathrm{Pic}(R)\neq\{0\}$ が本質的であるから R が local ならばこの方法では non-trivial な例を作ることはできない。そこで次に R が local であるとき non-trivial な例が存在するかどうかが問題となるがこのときもそのような例は以下に示すように存在する。

例(1). $R=\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]_{\mathfrak{p}}$ ここで $\mathfrak{p}=(2,2\sqrt{2})\in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]$, $A=R[X+\sqrt{2}X^2, X^2]$ とおくと A は non-trivial な例である。

例(2) k を field of characteristic $p>0$, $k[[t]]$ を 1 変数の formal power series ring とする。このとき $R=k[[t^2,t^3]]$, $A=R[X+tX^p, X^p]$ とおくと A は non-trivial な例である。

この例が示すように R が local であっても A がつねに $R[X]$ になることは望みえない。そこで次の問題を考える。

問題 I. R を noetherian local domain, A 及び B を rank 1 なる任意の invertible R-algebra とする。このとき $A\otimes_R B\cong_R R^{[2]}$ が成り立つか？

この問題について R が local という条件をとれば反例が存在することは前にのべたように $\mathrm{Pic}(R)\ni M\not\cong R^{(1)}$ をとって $M\oplus R^{(1)}\not\cong R^{(2)}$ になるから $\mathrm{Sym}_R(M)\otimes_R R[X]\not\cong R^{[2]}$ より示される。しかし R から local という条件をはぶいても問題 I

が成立すれば $R_\mathfrak{p} \otimes_R A \otimes_R B \cong R_\mathfrak{p} \otimes_R A \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} \otimes B \cong R_\mathfrak{p}^{[2]}$ がなりたつから $A \otimes_R B$ は locally polynomial algebra ゆえ $A \otimes B$ は Bass, Connel, Wright 及び Suslin により Symmetric algebra に同型 すなわちある projective R-module P が存在して $A \otimes_R B \cong_R Sym_R(P)$ がなりたつ。すなわち問題Iは次の問題IIと同値である。なお locally polynomial algebra については [4] を参照してください。

問題II. A及びBを rank 1 なる任意の invertible R-algebra とする。Rは noetherian domain を仮定する。すると $A \otimes_R B \cong_R Sym_R(P)$ なる projective R-module ~~P~~ P がかならず存在するか?

問題Iについての反例は知られていません。次の定理がなりたつ。

定理. 次の場合については問題Iが成り立つ。

(1) R が field を含むとき.

(2) (Krull) dim R = 1 のとき.

2. さて上の定理についてこれから考えてみよう。まず rank 1 の invertible R-algebra A の条件を調べることが先決である。

定義1. R が F-closed であるとは $t \in Q(R)$ (= quotient field) なる t が $t^2, t^3, nt \in R$ (n はある positive integer) をみたせ

ばつねに $t \in R$ なることである。またRを含み $Q(R)$ に含まれる最小のF-closed domainが存在するがそれを $F(R)$ とかいてRのF-closureという。([1],[3])

Rのcharacteristicが $p>0$ なるときはRがsemi-normalなることとRがF-closedなることは同値である。([5],[6])

定義2. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ について $R/\mathfrak{p}$ の $Q(R/\mathfrak{p})$ におけるintegral closureを考えそれを $R(\mathfrak{p})$ で表わすことにする。さてCをR-algebraとすると $f: R \longrightarrow R/\mathfrak{p} \subseteq R(\mathfrak{p})$ なるmappingによって $R(\mathfrak{p}) \otimes_R C$ が定義される。これを便宜的にCの $\mathfrak{p}$ におけるnormalityということにする。そこでCがnormally polynomial algebra in n variablesであるとは任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}$ についてそのnormality $R(\mathfrak{p}) \otimes_R C$ が $R(\mathfrak{p})$ 上のpolynomial ring in n-variablesになっているときをいう。

たとえばRが $\dim = 1$ なるlocal domainとすれば $\mathrm{Spec}\, R = \{\mathfrak{p}, 0\}$ だけであるからCがnormally polynomial algebraであるための必要十分条件はRのintegral closure in $Q(R)$ を $\tilde{R}$ で表わせば $\tilde{R} \otimes_R C \cong \tilde{R}^{[n]}$ かつ $R/\mathfrak{p} \otimes_R C \cong R/\mathfrak{p}^{[n]}$ なることである。(c.f. [2])

次の補題はAを特徴ずけるものである。

補題.1. Rがlocal domainで $\dim R < \infty$ とする。このとき次の(1)−(3)は同値である。

(1) Aは invertible R-algebra with rank 1.

(2) ある positive integer n について $A^{[n]} \cong_R R^{[n+1]}$

(3) Aは finitely generated, flat, normally R-algebra で $\Omega_R(A) \cong A^{(1)}$

さらにRが characteristic $P(\geqq 0)$ なる field を含めば上の3つの条件と次の条件(4)は同値である。

(4) (i) $P=0$ のとき $A \cong R[X]$

(ii) $P>0$ のとき $A \cong R[X+a_1X^{p}+\cdots+a_nX^{np}, X^{pe}]$ ここで $a_{i}' \in \overline{F}(R)$ で $a_i^{pe'} \in R$ をみたす。

この補題から次の系がなりたつ。

系. Rを dim 1 なる local domain, A及びBを invertible R-algebra with rank 1 とする。すると $A \cong_R A_1$ かつ $B \cong_R A_2$ なる R-algebra A_1及びA_2が存在して次の条件 をみたす。

(1) $R \subset R^* \subset Q(R)$ が存在して

(i) R^*/R は finite type の extension すなわち R^*は f.g. R-module

(ii) $R \subset A_i \subset R^*[X_i]$ $(i=1,2)$

(iii) $R^*[A_i] = R^*[X_i]$ $(i=1,2)$

(2) まず $\mathfrak{C}(R^*/R)$ で R上R^*の conductor を表わすと R^*/R が finite type ゆえ $\mathfrak{C}(R^*/R) \ni t$ が存在して $t \neq 0$ かつ tは non-unit in R^* とできる。このtについて ideal $tR^* = \mathfrak{a}$ を考えれば $\mathfrak{a}$はRの ideal でもある。さてこの ideal $\mathfrak{a}$につ

いて $R/\mathfrak{a}\otimes_R A_i\cong(R/\mathfrak{a})[X]$ がなりたつ。$(i=1,2)$

(3) $\Omega_R(A_i)\cong A_i^{(1)}$ $(i=1,2)$

(4) $A\otimes_R B\cong A_1\otimes_R A_2$ から $A_1[A_2]\subset R^*[x_1,x_2]=R^{*[2]}$ への R-algebra homomorphism $\varphi: A_1\otimes_R A_2\longrightarrow A_1[A_2]$ を $\varphi(a_1\otimes a_2)=a_1a_2$ で定めると R-algebra isomorphism になる。すなわち $A_1\otimes_R A_2\cong A_1[A_2]$ がなりたつ。

3. 定理の証明について簡単にのべる。まず(1)を証明するために次の補題2が必要である。

補題2. R を noetherian domain で characteristic が $p>0$ と仮定する。任意に $a_i, b_i\in F(R)$ $(i=1,\cdots,n)$ をとり $R^*=R[a_1,\cdots,a_n, b_1,\cdots,b_n]$ とおく。すると F-closure の性質から十分大なる positive integer e をとると $(R^*)^{p^e}\subset R$ とできる。さてこの e と R^* について 2変数の polynomial ring の automorphism $\Phi\in$ $\mathrm{Aut}_{R^*}R^*[X,Y]$ が存在して

$$\Phi(X)=X+a_1X^p+\cdots+a_nX^{np}+G(X^{p^e},Y^{p^e})$$

$$\Phi(Y)=Y+b_1Y^p+\cdots+b_nY^{np}+F(X^{p^e},Y^{p^e})$$

がなりたつ。ここで $G(X,Y)$, $F(X,Y)\in R[X,Y]$ である。

さて定理の(1)の条件の field の characteristic が 0 ならば補題のの(4)より rank 1 の invertible algebra A は $R[X]$ に同型であるから明らかになりたつ。characteristic が $p>0$ なるときはやはり補題1の(4)および補題2から同型を示すわけである。

補題1の(4)および補題2のいずれもRがfieldを含むということが本質的に(証明)の中にかかわってくる。それがfieldを含まぬとき問題Iの解答がきわめて困難になる理由である。そこで定理の(2)の証明であるがこれには系およびintegral extension の pull-back diagram を用いて証明される。(integral extension の pull-back diagram については[2]を参照してください)このときにはRがfieldを含むということは証明には無関係であるがどういうわけかこんどは $\dim R=1$ が本質的にかかわってくる。

4. 定理の(2)について1つの例を与えてみる。まず $R=\mathbb{Z}[2\sqrt{2}]_{g}$, $A=R[X+\sqrt{2}X^2, X^2]$ を例(1)のものとする。さてもう1つ $B=R[Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2]$ とおくとこれも non-trivial な例になっている。$A \not\cong R[X]$ なることは次のようにして示される。まず $R^*=R[\sqrt{2}]$ とおく。明らかに $R^*[A]=R^*[X]$ それゆえ $A\cong R[X]$ と仮定すると $F(X)\in R^*[X]$ が存在して $A=R[F(X)]$ と表わせる。さて $R^*[A]=R^*[F(X)]=R^*[X]$ であるから $F(X)=aX+b$ $(a, b\in R^*)$ となるところで $A\ni X+\sqrt{2}X^2$ なることより a は R の unit でなければならない。さらに A の任意の元 $G(X)$ の constant は R の元であるゆえ $A=R[X]\cong R[F(X)]$ となる。ゆえ $\sqrt{2}\in R$ でこれは矛盾である。Bも同様にして $B\not\cong R[X]$ なることが示される。次に $A\otimes B\cong$

$R^{[2]}$ なることを示す。実は系より $A\otimes B \cong A[B]=R[X+\sqrt{2}X^2, X^2, Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2]$ が示される。ゆえ $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2, Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[T, V]$ と表せることを示せばよい。そのために

$\Phi(X), \Phi(Y), \Psi(X), \Psi(Y) \in R^*[X,Y]$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} \Phi(X) = X+\sqrt{2}(X-\sqrt{2}Y)^2 \\ \Phi(Y) = Y-\frac{1}{\sqrt{2}}X+\frac{1}{\sqrt{2}}(X+\sqrt{2}(X-\sqrt{2}Y)^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi(X) = X-\frac{1}{\sqrt{2}}Y+\frac{1}{\sqrt{2}}(Y+\sqrt{2}(Y-\sqrt{2}X)^4) \\ \Psi(Y) = Y+\sqrt{2}(Y-\sqrt{2}X)^4 \end{cases}$$

すると $\Phi, \Psi \in \mathrm{Aut}_{R^*} R^*[X,Y]$ がいえる。

($\because$) $\Phi(X), \Psi(Y) \in R^*[X,Y]$ は明らか。また $\Phi(Y) = Y+(X-\sqrt{2}Y)^2$, $\Psi(X) = X+(Y-\sqrt{2}X)^4$ より $\Phi(X), \Psi(X) \in R^*[X,Y]$ がなりたつ。また

$$\begin{cases} X = \Phi(X)-\sqrt{2}(\Phi(X)-\sqrt{2}\,\Phi(Y))^2 \\ Y = \Phi(Y)-(\Phi(X)-\sqrt{2}\,\Phi(Y))^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \Psi(X)-(\Psi(Y)-\sqrt{2}\,\Psi(X))^4 \\ Y = \Psi(Y)-\sqrt{2}(\Psi(Y)-\sqrt{2}\,\Psi(X))^4 \end{cases}$$

がなりたつから $\Phi, \Psi \in \mathrm{Aut}_{R^*} R^*[X,Y]$ がなりたつ。

さて $\begin{cases} R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] = R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X] \\ R[Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[Y+\sqrt{2}Y^4] + 2R^*[Y] \end{cases}$

がなりたつことに注意する。ここで $2\in \mathcal{I}(R^*/R)$ ゆえ

$2R^*$ は R の ideal になっている。

(∵) $R^*[X+\sqrt{2}X^2, X^2] = R^*[X]$ であるから $2R^*[X+\sqrt{2}X^2, X^2] = 2R^*[X]$ がなりたつ。$2R^* \subset R$ ゆえ $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] \supset 2R^*[X]$. それゆえ $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] \supset R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$. 逆に $X^2 = (X+\sqrt{2}X)^2 - 2\sqrt{2}X^3 - 2X^4 \in R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$ であるから $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] \subset R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$. ゆえ上とあわせて $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2] = R[X+\sqrt{2}X^2] + 2R^*[X]$ が証明された。
$R[Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2]$ の場合と同様にして示される。

さて
$$\begin{cases} \Phi(X) \equiv X+\sqrt{2}X^2 \\ \Phi(Y) \equiv Y+X^2 \end{cases} \pmod{2R^*[X,Y]}$$
$$\begin{cases} \Psi(X) \equiv X+Y^4 \\ \Psi(Y) \equiv Y+\sqrt{2}Y^4 \end{cases} \pmod{2R^*[X,Y]}$$

がなりたつ。ゆえ $\Phi', \Psi' \in \mathrm{Aut}_{R^*} R^*[X,Y]$ を
$$\begin{cases} \Phi'(X) = \Phi(X) \\ \Phi'(Y) = \Phi(Y) - \Phi(X)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Psi'(X) = \Psi(X) - \Psi(Y)^4 \\ \Psi'(Y) = \Psi(Y) \end{cases}$$
とおけば
$$\begin{cases} \Phi'(X) \equiv X+\sqrt{2}X^2 \\ \Phi'(Y) \equiv Y \end{cases} \pmod{2R^*[X,Y]}$$
$$\begin{cases} \Psi'(X) \equiv X \\ \Psi'(Y) \equiv Y+\sqrt{2}Y^4 \end{cases} \pmod{2R^*[X,Y]}$$

がなりたつ。この Φ', Ψ' について

(1) $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2, Y] = R[\Phi'(X), \Phi'(Y)]$

(2) $R[Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2, X] = R[\Psi'(X), \Psi'(Y)]$

(3) $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2, Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)]$

がなりたつ。

(∵) (3)を示す。(2)と(1)も同様に示される。まず前に示したように $R[X+\sqrt{2}X^2, X^2, Y+\sqrt{2}Y^4, Y^2] = R[X+\sqrt{2}X^2, Y+\sqrt{2}Y^4] + 2R^*[X, Y]$ がなりたつ。ところで $R^*[X, Y] = R^*[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)]$ であるから $2R^*[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)] = 2R^*(X, Y]$ がなりたつ。また

$$\begin{cases} \Phi'\Psi'(X) \equiv X+\sqrt{2}X^2 \\ \Phi'\Psi'(Y) \equiv Y+\sqrt{2}Y^4 \end{cases} \pmod{2R^*(X, Y]}$$

がなりたつから

$$R[X+\sqrt{2}X^2, Y+\sqrt{2}Y^4] \equiv R[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)] \pmod{2R^*[X,Y]}$$

$$= (\mathrm{mod}\ 2R^*[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)])$$

すなわち.

$R[X+\sqrt{2}X^2, Y+\sqrt{2}Y^4] + 2R^*(X, Y] = R[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)] + 2R^*[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)] = R[\Phi'\Psi'(X), \Phi'\Psi'(Y)]$ ゆえ(3)が示された。

(1)は $A[Y] \cong R[X, Y]$

(2)は $B[X] \cong R[X, Y]$

(3)は $A \otimes B \cong R[X, Y]$

を示している。

参考文献

[1]. 浅沼., 環における Lüroth の定理, 第1回可換環論若手シンポジウム報告集, 日本大学軽井沢研修所, (1978).

[2] 〃 , Normally polynomial について, 新代数セミナー報告集, 城崎, (1979)

[3] T. Asanuma, D-algebras stably equivalent to D[Z]. Proc. Int. Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto (1977)

[4] H. Bass, H. Connel and D. Wright, Locally polynomial algebras are symmetric algebras. Invent. Math 38, 279 - 299 (1977)

[5] E. Hamann, On the R-invariance of R[X]. J. Algebra, 35, 1-16 (1975)

[6] C. Traverso, Seminormality and Pic group. Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa 24, 585-595 (1970).